

International Conference - October 8, 2016 - Department of Mathematics - University of Bologna

La Matematica e la sua Didattica

Mathematics and Mathematics Education

In occasion of the 70 years of Bruno D'Amore

Editor
Maura Iori

Preface
Bruno D'Amore



Pitagora Editrice Bologna

Ragionamento deduttivo e modello argomentativo nyaya

Miglena Asenova

NRD, Università di Bologna

Sunto. *In questo articolo vengono esaminate le caratteristiche del modello argomentativo nyaya, al fine di stabilire il suo legame con il ragionamento deduttivo, facendo riferimento ai lavori di Duval relativi all'analisi del funzionamento cognitivo e alla comprensione dei processi della dimostrazione in matematica.*

Abstract. *In this paper the features of the nyaya argumentative model are examined, referring to Duval's works on the analysis of cognitive functioning and understanding of the processes of mathematical proof, in order to establish its connection with deductive reasoning.*

1. Premessa

Uno dei problemi più controversi nell'evoluzione del curriculum di matematica sia in Italia sia in altri Paesi del mondo è quello relativo all'avvio degli studenti alla pratica didattica della dimostrazione. Nell'ultimo decennio in Italia si è fatta avanti l'idea, rintracciabile nelle Indicazioni nazionali per il primo ciclo d'istruzione, che a questi livelli scolastici non sia possibile introdurre la dimostrazione nel suo più ampio senso logico, ma che sia opportuno avviare gli studenti al ragionamento matematico attraverso l'argomentazione.¹

L'opinione che l'argomentazione sia propedeutica alla dimostrazione non è tuttavia condivisa da tutti i ricercatori in didattica della matematica e inoltre, come sottolinea Balacheff (1999), l'adesione a una piuttosto che a un'altra concezione di argomentazione induce necessariamente a prese di posizione diverse riguardo a ciò che l'argomentazione può rappresentare nell'ambito dell'azione didattica e in particolare in riferimento alla dimostrazione.

Lo scopo di questo breve articolo è quello di esaminare le caratteristiche di un particolare modello argomentativo: il modello nyaya (il cui nome tradotto significa "logica"), nato nel I secolo d. C., in seno all'omonima scuola filosofica indiana.

Il testo che proponiamo è uno stralcio di un lungo lavoro di ricerca che ci prefiggiamo di condurre nei prossimi anni e che ha preso spunto da un articolo di Bruno D'Amore (D'Amore, 2005), relativo all'argomentazione matematica

¹ Si vedano a tale proposito le Indicazioni nazionali per il curriculum della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione (MIUR, 2012, p. 51).

spontanea di allievi di scuola secondaria. Nelle nostre considerazioni faremo inoltre riferimento ai lavori di Raymond Duval, relativi all'analisi del funzionamento cognitivo e della comprensione dei processi matematici della dimostrazione (Duval, 1992-93, 2007).

2. L'argomentazione *nyaya*

Secondo la scuola filosofica indiana *nyaya*, che sviluppò un insieme di regole per la speculazione razionale, la falsa conoscenza è una delle cause che impedisce all'essere umano di uscire dal mondo della sofferenza; il retto pensare è in questo senso uno strumento indispensabile per giungere alla liberazione. La *nyaya* era dunque strettamente legata alla concezione etica e religiosa dell'omonima corrente filosofica; tuttavia, il *Nyaya-sutra* di Gautama, del I sec. d. C., nel quale viene esposta la struttura logica di quello che veniva considerato "il retto ragionare", è un vero e proprio trattato di logica. Vediamo più da vicino questo modello argomentativo, mettendo in evidenza i suoi strumenti e il suo schema di ragionamento. A tale scopo seguiamo D'Amore (2005).

La *nyaya* riconosce un'importanza preminente ai seguenti quattro "mezzi di conoscenza": la testimonianza, l'analogia, la percezione e l'inferenza.

La testimonianza comprende tutto ciò che viene considerato degno di fede, come per esempio le preghiere, la rivelazione divina, la storia tramandata etc.

L'analogia è un modo di ragionare che consente di definire un oggetto in base alla sua somiglianza con altri. Il corrispondente a questo concetto nella logica aristotelica è dato dalla definizione per genere prossimo e differenza specifica oppure dalle definizioni tramite il passaggio al quoziente. La percezione è la relazione tra l'oggetto (sensibile) e l'immagine che si ha di esso. La *nyaya* ha un'impronta pratica ed empirista e quindi non deve meravigliare il fatto che essa dia molta importanza alla percezione; tuttavia non si deve trascurare il fatto che per questa dottrina anche l'intelletto rappresenta un senso ed è dunque un mezzo di percezione.

L'inferenza è infine ciò che può essere considerato "il sillogismo" *nyaya* ed ha la seguente struttura:

1. l'asserzione (non dimostrata); è l'enunciazione di ciò che si vuole dimostrare;
2. la ragione;
3. la proposizione generale o enunciato, seguita da un esempio;
4. l'applicazione, detta anche seconda asserzione;
5. la conclusione (D'Amore, 2005, pp. 5-6).

2.1. L'argomentazione *nyaya* e il ragionamento deduttivo

Esaminiamo ora lo schema argomentativo *nyaya* facendo ricorso all'analisi delle caratteristiche dell'argomentazione e della dimostrazione effettuata da Duval (Duval, 1992-93, 2007). Consideriamo a tale scopo la natura delle

proposi
livello
Come
specula
fenome
in que
dimost
Nonos
nel m
veridic
propos
della s
Soffer
Tratta
sensib
causal
nell'in
questo
signifi
conne
dunqu
argom
infatt
suo v
nel si
abbia
come
gene
Esan
disco
segu
prop
auto
pong
un'a
testi
rifer
rapp
prop
razi
mat
"sil
che

proposizioni che sono coinvolte (o coinvolgibili), la natura dell'inferenza a livello locale e la struttura dell'argomentazione a livello globale.

Come abbiamo già accennato, la nyaya è una logica che nasce con un intento speculativo, ma di natura pragmatica, legato cioè alla spiegazione razionale di fenomeni che possono cadere sotto ai sensi. Tuttavia le proposizioni coinvolte in questo tipo di argomentazione sono delle proposizioni di cui si intende dimostrare la verità (o falsità) ed esse hanno dunque un valore logico di verità. Nonostante il loro contenuto sia di tipo informativo, è importante notare che nel modello nyaya si fa espressamente cenno all'esigenza di verità (o di veridicità) e non solo ad un grado di plausibilità delle premesse della proposizione coinvolta (si veda a tale proposito il penultimo passo, quello della seconda asserzione).

Soffermiamoci ora sulla natura dell'inferenza dal punto di vista locale. Trattandosi di un modello argomentativo con un forte legame con la realtà sensibile, il "se ... allora ..." dell'inferenza nelle singole proposizioni è di tipo causale e non di tipo logico (non è dunque un'implicazione materiale). Però nell'inferenza nyaya si esamina espressamente la verità della premessa e questo fatto consentirebbe a nostro avviso un'eventuale espansione di significato a tutti i casi di valori di verità assegnabili alla premessa e quindi al connettivo logico "se ... allora" (D'Amore, 2001). A nostro avviso si può dunque affermare che gli enunciati presi in considerazione dal modello argomentativo nyaya abbiano un valore epistemico teorico e non normativo; infatti, in essa, la legge (o proposizione) generale *garantisce* effettivamente il suo valore di verità. Inoltre, dal punto di vista del ruolo di una proposizione nel singolo passo inferenziale, è possibile notare come nel modello nyaya essa abbia un compito ben definito, in riferimento alla sua azione come premessa, come conclusione o come enunciato terzo (più precisamente come generalizzazione del particolare).

Esaminiamo ora il ruolo di una proposizione nell'organizzazione globale del discorso, cioè in relazione alle altre proposizioni. Ad un primo sguardo, seguendo l'analisi di Duval, si potrebbe pensare che nello schema nyaya, le proposizioni abbiano uno statuto normativo (si fa riferimento ad opinioni autorevoli etc.) e non teorico. Tuttavia, il fatto che l'argomentazione nyaya ponga tra i mezzi di conoscenza la testimonianza (con forti riferimenti ad un'autorevolezza trascendente) e la percezione, non esclude che tali testimonianze possano avere il ruolo di assiomi in un sistema che fa riferimento ad un certo tipo di razionalità. L'argomentazione nyaya rappresenta dunque una struttura argomentativa che consente di attribuire alle proposizioni coinvolte uno statuto teorico, supposto che si fissi un sistema di razionalità appropriato. Nulla vieta che tale razionalità sia quella di una teoria matematica. Infine, possiamo notare la presenza della chiusura del "sillogismo" nell'argomentazione nyaya, che rappresenta in realtà null'altro che un esempio della regola di "... modus ponens allargato al calcolo dei

predicati, un'operazione logicamente corretta ed essenziale al funzionamento di quel sillogismo ..." (D'Amore, 2005, p. 7). Dunque la conclusione di un passo può diventare la premessa di quello successivo, creando così una struttura priva di lacune dal punto di vista logico.

2.2. Il ruolo della generalizzazione e degli esempi nel modello argomentativo nyaya

Consideriamo infine due aspetti della struttura argomentativa esaminata, i quali hanno una certa importanza sia dal punto di vista teorico sia da punto di vista didattico: l'uso del concetto di generalizzazione e il ricorso a esempi. La generalizzazione effettuata nella formulazione dell'enunciato generale dello schema nyaya è chiaramente di natura induttiva e le regole che si devono seguire per poterla effettuare non sono chiaramente esplicitate (probabilmente il concetto di generalizzazione nel sistema di riferimento nyaya è molto diverso da quello della generalizzazione in matematica e si basa su un certo numero di esempi osservati o ipotizzabili coinvolgendo i "mezzi di conoscenza" contemplati (si veda a tale proposito D'Amore, 2005). L'induzione nyaya è naturalmente tutt'altra cosa rispetto al principio di induzione in matematica, e rappresenta forse il suo aspetto più "debole", dal punto di vista logico in senso moderno. Tuttavia, anche qui, nulla vieta di immaginare in questo punto dello schema l'uso di una generalizzazione logicamente corretta, il cui mancato ottenimento dimostrerebbe la falsità della proposizione. Inoltre, se esaminiamo bene la struttura del modello nyaya, possiamo notare come il "vero" sillogismo, cioè quello che corrisponderebbe ad un passo deduttivo (supposta una generalizzazione corretta), è solo l'ultima parte dell'inferenza, mentre gli step precedenti servono al soggetto per prendere confidenza con ciò che deve essere dimostrato. In questo senso, la generalizzazione prende l'aspetto di una vera e propria congettura, nata dall'esame di un dato numero di casi e soprattutto dall'esame di eventuali analogie con altri casi già noti. Nello stesso senso si può valutare anche il fatto che all'inizio la posizione della tesi e dell'ipotesi sono invertite rispetto all'ordine che viene imposto nel ragionamento di tipo deduttivo per noi classico. I passi che precedono la costruzione dell'affermazione generale rappresentano quindi una ricerca preliminare, sperimentale, degli enunciati e dei concetti che devono intervenire nel passo deduttivo. Facciamo infine alcune considerazioni sull'uso degli esempi. Gli esempi sono sostanzialmente estranei ad un ragionamento di tipo deduttivo, mentre sono tenuti in grande considerazione nel ragionamento nyaya. Tuttavia, se esaminiamo la struttura dello schema nyaya, possiamo notare che l'esempio che deve essere portato a supporto dell'affermazione generale non ha un ruolo "vitale" nella struttura: possiamo infatti immaginare di eliminare il riferimento ad esempi e il ragionamento nyaya sarebbe comunque logicamente corretto; in effetti, in quella filosofia l'esempio ha primariamente una funzione di

ancoraggio al
Nel testo di
fanno sponta
"ancoraggio"

3. Conclusione

Il modello ar
versatile e ri
modello argo
aspetti legati
aspetti legati

Bibliografia

- Balacheff, N.
Internatio
<http://www.emeUK.h>
D'Amore, B.
Pitagora.
D'Amore, B.
e la logic
Duval, R. (cognitive
1996, 13
Quérétari
Duval, R. (2)
processes
Rotterda
Duval, R., &
raisonne
MIUR (2012
primo ci
<http://hu>

ancoraggio alla realtà, di limitazione di ragionamenti puramente speculativi. Nel testo di D'Amore (2005) si danno interessanti e numerosi esempi cui fanno spontaneamente ricorso studenti di scuola superiore proprio nel senso di "ancoraggio" qui descritto.

3. Conclusioni

Il modello argomentativo nyaya rivela ad un'attenta analisi una struttura molto versatile e ricca di potenzialità dal punto di vista didattico. Si tratta di un modello argomentativo che consente di interpretare in un'unica struttura sia gli aspetti legati alla congettura (con riferimenti forti all'uso dell'analogia), sia gli aspetti legati alla deduzione, sia l'uso degli esempi.

Bibliografia

- Balacheff, N. (1999). Is argumentation an obstacle? Invitation to a debate. *International Newsletter on the Teaching and Learning on proof*. <http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990506Theme/990506ThemeUK.html>.
- D'Amore, B. (2001). *Scritti di Epistemologia Matematica, 1980-2001*. Bologna: Pitagora.
- D'Amore, B. (2005). L'argomentazione matematica di allievi della scuola secondaria e la logica indiana (nyaya). *La matematica e la sua didattica*, 4, 481-500.
- Duval, R. (1992-93). Argumenter, démontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive? *Petit x*, 31, 37-61. [Trad. it.: *La matematica e la sua didattica*, 2, 1996, 130-152; appare anche come primo volume nella collana Bologna-Quéretaro, Bologna: Pitagora].
- Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of the mathematical processes of proof. In P. Boero (Ed.), *Theorems in schools* (pp. 137-161). Rotterdam/Taipei: Sense.
- Duval, R., & Egret, M. A. (1993). Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif. *Repère*, 12, 114-140.
- MIUR (2012). *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*. Roma. http://hubmiur.pubblica.istruzione.it/web/istruzione/prot7734_12

Questo volume raccoglie i contributi dei relatori del Convegno Internazionale *La Matematica e la sua Didattica*, tenutosi l'8 ottobre 2016 presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna, dedicato ai 70 anni di Bruno D'Amore. Al di là dell'occasione, è una raccolta di significative testimonianze dovute ad alcuni tra i massimi protagonisti della ricerca in diversi campi.

This volume collects the contributions of the lecturers of the International Conference *Mathematics and Mathematics Education*, that took place on October 8, 2016, at the Department of Mathematics of the University of Bologna, Italy. The conference was dedicated to the 70 years of Bruno D'Amore. Beyond the occasion, this publication is a collection of relevant evidences from some of the leading researchers in different fields.

In copertina: *Impossible figures*, di Oscar Reutersvärd, 1981 circa.
Front cover: *Impossible figures*, by Oscar Reutersvärd, circa 1981.



ISBN 88-371-1927-5



9 788837 119270